Μαθηματικά και στοιχεία στατιστικής
Ορισμοί - Βασικά στοιχεία θεωρίας

Ορισμοί

Διαφορικός Λογισμός

Ορισμός 1 (Συνάρτηση): **Συνάρτηση** είναι μία διαδικασία με την οποία κάθε στοιχείο ενός συνόλου Α αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο κάποιου άλλου συνόλου Β.

Ορισμός 2 (Εξίσωση γραφικής παράστασης): Η εξίσωση $\mathrm{y} = \mathrm{f}(\mathrm{x})$ επαληθεύεται μόνο από τα ζεύγη (x, y) που είναι συντεταγμένες σημείων της γραφικής παράστασης της f και λέγεται εξίσωση της γραφικής παράστασης της f.

Ορισμός 3 (Γραφική παράσταση συνάρτησης): Έστω μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A. Γραφική παράσταση ή καμπύλη της f σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy λέγεται το σύνολο των σημείων $M(x, f(x))$ για όλα τα $x \in A$.

Ορισμός 4 (γνησίως αύξουσα συνάρτηση): Μία συνάρτηση f λέγεται **γνησίως αύξουσα** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε σημεία $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2 \in \Delta$ με $\mathrm{x}_1 < \mathrm{x}_2$ ισχύει $\mathrm{f}(\mathrm{x}_1) < \mathrm{f}(\mathrm{x}_2)$.

Ορισμός 5 (Γνησίως φθίνουσα συνάρτηση): Μία συνάρτηση f λέγεται **γνησίως φθίνουσα** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε σημεία $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2 \in \Delta$ με $\mathrm{x}_1 < \mathrm{x}_2$ ισχύει $\mathrm{f}(\mathrm{x}_1) > \mathrm{f}(\mathrm{x}_2)$.

Ορισμός 6 (Γνησίως μονότονη συνάρτηση): Μία συνάρτηση που είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα λέγεται **γνησίως μονότονη**.

Ορισμός 7 (Τοπικό μέγιστο): Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α λέμε ότι παρουσιάζει **τοπικό μέγιστο** στο $\mathrm{x}_1 \in \mathrm{A}$, όταν $\mathrm{f}(\mathrm{x}) \leq \mathrm{f}(\mathrm{x}_1)$ για κάθε x σε μια περιοχή του x_1.

Ορισμός 8 (Τοπικό ελάχιστο): Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α λέμε ότι παρουσιάζει **τοπικό ελάχιστο** στο $\mathrm{x}_1 \in \mathrm{A}$, όταν $\mathrm{f}(\mathrm{x}) \geq \mathrm{f}(\mathrm{x}_1)$ για κάθε x σε μια περιοχή του x_1.

Παρατήρηση: Στον ορισμό του βιβλίου, οι ορισμοί για το τοπικό μέγιστο και ελάχιστο δίνονται ταυτόχρονα. Συνεπώς για το τοπικό ελάχιστο χρησιμοποιεί ένα $\mathrm{x}_2 \in \mathrm{A}$ και $\mathrm{f}(\mathrm{x}) \geq \mathrm{f}(\mathrm{x}_2)$. Αν ζητηθούν και οι δύο ορισμοί, τότε θα χρησιμοποιήσετε διαφορετικά $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2$. Αν ζητηθεί ο ένας από τους δύο ορισμούς, τότε χρησιμοποιείστε το x_1.

Ορισμός 9 (Συνέχεια): Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέγεται **συνεχής**, αν για κάθε $\mathrm{x}_0 \in \mathrm{A}$ ισχύει $\lim\limits_{\mathrm{x} \to \mathrm{x}_0} \mathrm{f}(\mathrm{x}) = \mathrm{f}(\mathrm{x}_0)$.

Ορισμός 10 (Πότε μία συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0): Μία συνάρτηση f λέμε ότι είναι **παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο $\mathbf{x_0}$** του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ και είναι πραγματικός αριθμός. Το όριο αυτό ονομάζεται παράγωγος της f στο x_0 και συμβολίζεται με $f'(x_0)$. Δηλαδή:

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Ορισμός 11 (Παράγωγος): Έστω μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A και B το σύνολο των $x\in A$ στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη. Τότε ορίζεται μία νέα συνάρτηση, με την οποία κάθε $x\in A$ αντιστοιχίζεται στο $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Η συνάρτηση αυτή λέγεται (πρώτη) παράγωγος της f και συμβολίζεται με $\mathbf{f'}$.

Στατιστική

Ορισμός 12 (Πληθυσμός): **Πληθυσμός** ονομάζεται ένα σύνολο, τα στοιχεία του οποίου εξετάζουμε ως προς ένα ή περισσότερα χαρακτηριστικά τους

Ορισμός 13 (Μεταβλητές): **Μεταβλητές** ονομάζονται τα χαρακτηριστικά ως προς τα οποία εξετάζομαι έναν πληθυσμό και τις συμβολίζουμε με τα κεφαλαία γράμματα $X, Y, Z, B, \ldots$

Ορισμός 14 (Τιμές μεταβλητής): Οι δυνατές τιμές που μπορεί να πάρει μία μεταβλητή λέγονται **τιμές της μεταβλητής**.

Ορισμός 15 (Ποιοτικές ή κατηγορικές μεταβλητές): **Ποιοτικές ή κατηγορικές** ονομάζονται οι μεταβλητές των οποίων οι τιμές τους δεν είναι αριθμοί.

Ορισμός 16 (Ποσοτικές μεταβλητές): **Ποσοτικές** ονομάζονται οι μεταβλητές των οποίων οι τιμές είναι αριθμοί και διακρίνονται:

i. Σε διακριτές μεταβλητές, που παίρνουν μόνο «μεμονωμένες» τιμές.
ii. Σε συνεχείς μεταβλητές, που μπορούν να πάρουν οποιαδήποτε τιμή ενός διαστήματος πραγματικών αριθμών (α, β).

Ορισμός 17 (Απογραφή): Η μέθοδος της συλλογής δεδομένων με απαραίτητες πληροφορίες που χρειαζόμαστε για κάποιο πληθυσμό και η εξέταση όλων των ατόμων (στοιχείων) του πληθυσμού ως προς ένα χαρακτηριστικό που μας ενδιαφέρει, ονομάζεται **απογραφή**.

Ορισμός 18 (Δείγμα): **Δείγμα** καλείται των σύνολο των πληροφοριών που συλλέγει ο ερευνητής από μία μικρή ομάδα ή υποσύνολο του πληθυσμού.

Ορισμός 19 (Αντιπροσωπευτικό δείγμα): Ένα δείγμα καλείται **αντιπροσωπευτικό** ενός πληθυσμού, αν τα αποτελέσματα που προκύπτουν από τη μελέτη του δείγματος είναι αξιόπιστα. Ισχύουν δηλαδή με ικανοποιητική ακρίβεια για ολόκληρο τον πληθυσμό.

Ορισμός 20 (Δειγματοληψία): Οι αρχές και οι μέθοδοι για τη συλλογή και ανάλυση δεδομένων από πεπερασμένους πληθυσμούς, είναι το αντικείμενο της **Δειγματοληψίας**.

Ορισμός 21 (Απόλυτη συχνότητα): Ο φυσικός αριθμός που δείχνει το πόσες φορές εμφανίζεται η τιμή x_i της εξεταζόμενης μεταβλητής X στο σύνολο των παρατηρήσεων ονομάζεται **(απόλυτη) συχνότητα $\boldsymbol{\nu_i}$**.

Ορισμός 22 (Σχετική συχνότητα): Αν διαιρέσουμε τη συχνότητα ν_i με το μέγεθος ν του δείγματος, προκύπτει η **σχετική συχνότητα $\boldsymbol{f_i}$** της τιμής x_i, δηλαδή:

$$f_i = \frac{\nu_\iota}{\nu}$$

Ορισμός 23 (Αθροιστική συχνότητα): Η **αθροιστική συχνότητα $\boldsymbol{N_i}$** εκφράζει το πλήθος των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες ή ίσες της τιμής x_i.

Ορισμός 24 (Αθροιστική σχετική συχνότητα): Η α**θροιστική σχετική συχνότητα $\boldsymbol{F_i}$** εκφράζει το ποσοστό των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες ή ίσες της τιμής x_i.

Ορισμός 25 (Κυκλικό διάγραμμα): Το **κυκλικό διάγραμμα** είναι ένας κυκλικός δίσκος χωρισμένος σε κυκλικούς τομείς, τα εμβαδά ή, ισοδύναμα, τα τόξα των οποίων είναι ανάλογα προς τις αντίστοιχες συχνότητες ν_i ή τις σχετικές συχνότητες f_i των τιμών x_i της μεταβλητής.

Ορισμός 26 (Πλάτος κλάσης): **Πλάτος** μίας κλάσης ονομάζεται η διαφορά του κατώτερου από το ανώτερο όριο της κλάσης.

Ορισμός 27 (Εύρος): **Εύρος** καλείται η διαφορά της μικρότερης παρατήρησης από τη μεγαλύτερη παρατήρηση του συνολικού δείγματος.

Ορισμός 28 (Συχνότητα κλάσης): Το πλήθος των παρατηρήσεων ν_i που προκύπτουν από τη διαλογή για την κλάση i καλείται **συχνότητα της κλάσης** αυτής ή συχνότητα της κεντρικής τιμής $x_i,\ i = 1,2,\dots,\kappa$.

Ορισμός 29 (Πολύγωνο συχνοτήτων): Αν στα ιστογράμματα συχνοτήτων θεωρήσουμε δύο ακόμη υποθετικές κλάσεις στην αρχή και στο τέλος, με συχνότητα μηδέν και στη συνέχεια ενώσουμε τα μέσα των άνω βάσεων των ορθογωνίων με ευθύγραμμα τμήματα, σχηματίζεται το λεγόμενο **πολύγωνο συχνοτήτων**.

Ορισμός 30 (Πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων): Αν ενώσουμε σε ένα ιστόγραμμα αθροιστικών συχνοτήτων τα δεξιά άκρα των άνω βάσεων των ορθογωνίων με ευθύγραμμα τμήματα βρίσκουμε το **πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων**.

Ορισμός 31 (Ομοιόμορφη κατανομή): Όταν οι παρατηρήσεις «κατανέμονται» ομοιόμορφα σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$ η κατανομή λέγεται **ομοιόμορφη**.

Ορισμός 32 (Ασύμμετρη κατανομή): Όταν οι παρατηρήσεις σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$ δεν είναι συμμετρικά κατανεμημένες, η κατανομή λέγεται **ασύμμετρη** με θετική συμμετρία ή αρνητική συμμετρία.

Ορισμός 33 (Διάμεσος): **Διάμεσος (δ)** ενός δείγματος ν παρατηρήσεων οι οποίες έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά, ορίζεται ως η μεσαία παρατήρηση, όταν το ν είναι περιττός αριθμός, ή ο μέσος όρος (ημιάθροισμα) των δύο μεσαίων παρατηρήσεων όταν το ν είναι άρτιος αριθμός.

Βασικά σημεία θεωρίας

1. **Τα σύνολο A και B στον ορισμό της συνάρτησης.**

Στον ορισμό της συνάρτησης, είπαμε ότι:

"**Συνάρτηση** είναι μία διαδικασία με την οποία κάθε στοιχείο ενός συνόλου Α αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο κάποιου άλλου συνόλου Β".

- ✓ Το σύνολο A λέγεται πεδίο ορισμού της συνάρτησης και είναι υποσύνολο του συνόλου $\mathbb{R}$.
- ✓ Το σύνολο Β συμπίπτει με το $\mathbb{R}$.
- ✓ Οι συναρτήσεις αυτές λέγονται **πραγματικές συναρτήσεις πραγματικής μεταβλητής**. Απλούστερα, θα τις καλούμε όπως είπαμε, **συναρτήσεις**.

Σχόλιο: Για να γίνει πιο κατανοητή η έννοια του πεδίου ορισμού, πέρα από τον αυστηρό μαθηματικό ορισμό, μπορούμε να πούμε ότι είναι όλες οι δυνατές τιμές που μπορούμε να δώσουμε στο x έτσι ώστε να έχει νόημα η συνάρτηση $f(x)$.

2. **Στη συνάρτηση $y = f(x)$ ισχύουν τα εξής:**

- ✓ Το $f(x)$ λέγεται τιμή της f στο x.
- ✓ Το γράμμα x που συμβολίζει οποιοδήποτε στοιχείο του A, ονομάζεται **ανεξάρτητη μεταβλητή**.
- ✓ Το y, παριστάνει την τιμή της συνάρτησης στο x και εξαρτάται από την τιμή του x, συνεπώς λέγεται **εξαρτημένη μεταβλητή**.

3. **Πράξεις με συναρτήσεις.**

Αν δύο συναρτήσεις f, g ορίζονται και οι δύο σε ένα σύνολο A, τότε ορίζονται οι εξής συναρτήσεις:

- ✓ Το άθροισμα: $S = f + g$, με $S(x) = f(x) + g(x),\ x \in A$
- ✓ Η διαφορά $D = f - g$, με $D(x) = f(x) - g(x),\ x \in A$
- ✓ Το γινόμενο $P = f \cdot g$ με $P(x) = f(x) \cdot g(x), x \in A$
- ✓ Το πηλίκο $R = \frac{f}{g}$, με $R(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, x \in A$ και $g(x) \neq 0$.

4. **Ιδιότητες ορίων.**

Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν στο x_0 όρια πραγματικούς αριθμούς, δηλαδή αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l_1$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = l_2$, όπου l_1, l_2 πραγματικοί αριθμοί, τότε αποδεικνύεται ότι:

- ✓ $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x) + g(x)) = l_1 + l_2$
- ✓ $\lim\limits_{x\to x_0}(kf(x)) = kl_1$

- ✓ $\lim_{x \to x_0} (f(x)g(x)) = l_1 l_2$
- ✓ $\lim_{x \to x_0} (\frac{f(x)}{g(x)}) = \frac{l_1}{l_2}$
- ✓ $\lim_{x \to x_0} \left(f(x)\right)^\nu = l_1^\nu$
- ✓ $\lim_{x \to x_0} \sqrt[\nu]{f(x)} = \sqrt[\nu]{l_1}$.

5. Τι εκφράζει η παράγωγος μίας συνάρτησης f σε ένα σημείο x_0.

Η παράγωγος της f στο x_0, εκφράζει το **ρυθμό μεταβολής** του $y = f(x)$ ως προς το x, όταν $x = x_0$.

6. Ταχύτητα και επιτάχυνση.

- ✓ Η **ταχύτητα** ενός κινητού που κινείται ευθύγραμμα και η θέση του στον άξονα κίνησής του εκφράζεται από τη συνάρτηση $x = f(t)$ θα είναι τη χρονική στιγμή t_0

  $$v(t_0) = f'(t_0),$$

  Δηλαδή ο ρυθμός μεταβολής της $f(t)$ ως προς t όταν $t = t_0$.
- ✓ Αν η συνάρτηση v είναι παραγωγίσιμη, τότε η **επιτάχυνση** του κινητού τη χρονική στιγμή t θα είναι η παράγωγος της ταχύτητας, δηλαδή ισχύει:

  $$a(t) = v'(t)$$

Με απλά λόγια, αν έχουμε μία συνάρτηση και θέλουμε να βρούμε την **ταχύτητα** και την **επιτάχυνση** ενός σώματος, τότε χρειαζόμαστε την **πρώτη** και τη **δεύτερη παράγωγο** αντίστοιχα!

7. Η συνάρτηση $f(x) = |x|$.

Η συνάρτηση $f(x) = |x|$, δεν έχει παράγωγο στο $x_0 = 0$!