Εξισώσεις

1η κατηγορία: «Απλές εξισώσεις 1ου βαθμού»

- ✓ Οι «απλές», όπως αναφέρω, εξισώσεις 1ου βαθμού, είναι όλες αυτές που έχετε δει για πρώτη φορά στο γυμνάσιο. Δηλαδή, δεν έχουν παρονομαστές και περιέχουν κυρίως απλές πράξεις και παρενθέσεις. Για να τις επιλύσουμε, ακολουθούμε την εξής **μεθοδολογία**:

1ο Βήμα: Απαλοίφουμε τις παρενθέσεις (εφόσον υπάρχουν).

2ο Βήμα: Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους.

3ο Βήμα: Κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων.

4ο Βήμα: Διαιρούμε με το συντελεστή του αγνώστου και βρίσκουμε τη λύση.

Παράδειγμα: Να λυθεί η εξίσωση:

$$2(3x+5)-4(x-1)+6=24 \Leftrightarrow$$

$$6x+10-4x+4+6=24 \Leftrightarrow$$

$$6x-4x=24-10-4-6 \Leftrightarrow$$

$$2x=4 \Leftrightarrow$$

$$\frac{2x}{2}=\frac{4}{2} \Leftrightarrow$$

$$x=2$$

2η κατηγορία: «Εξισώσεις 1ου βαθμού με παρονομαστές»

- ✓ Αυτή η κατηγορία εξισώσεων είναι επίσης γνωστή σε εσάς από το γυμνάσιο. Σε αυτές, η μεθοδολογία που ακολουθούμε είναι όμοια με την 1η κατηγορία, με τη διαφορά ότι προκύπτουν δύο παραπάνω βήματα.

1ο Βήμα: Βρίσκουμε το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών.

2ο Βήμα: Κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών, πολλαπλασιάζοντας με το Ε.Κ.Π. που βρήκαμε στο προηγούμενο βήμα.

3ο Βήμα: Απαλοίφουμε τις παρενθέσεις (εφόσον υπάρχουν).

4ο Βήμα: Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους.

5ο Βήμα: Κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων.

6ο Βήμα: Διαιρούμε με το συντελεστή του αγνώστου και βρίσκουμε τη λύση.

Παράδειγμα: Να λυθεί η εξίσωση:

$$\frac{2x+4}{4}-\frac{x-1}{3}=5 \Leftrightarrow$$

$$12\cdot\frac{2x+4}{4}-12\cdot\frac{x-1}{3}=12\cdot 5 \Leftrightarrow$$

$$3(2x+4)-4(x-1)=60 \Leftrightarrow$$

$$6x+12-4x+4=60 \Leftrightarrow$$

$$6x-4x=60-4-12 \Leftrightarrow$$

$$2x=44 \Leftrightarrow$$

$$\frac{2x}{2}=\frac{44}{2} \Leftrightarrow$$

$$x=22$$

<u>3^{η} κατηγορία: «Παραμετρικές εξισώσεις»</u>

- ✓ Αυτή η κατηγορία ασκήσεων είναι η πιο ιδιαίτερη, καθώς για πρώτη φορά στα σχολικά σας χρόνια εμφανίζεται έντονα η έννοια της παραμέτρου. Ακολουθώντας την παρακάτω μεθοδολογία, δοσμένη όπως πάντα σε ξεκάθαρα βήματα, μπορείτε να αντιμετωπίσετε οποιαδήποτε παραμετρική εξίσωση σας δοθεί.

Πριν ξεκινήσω με τα βήματα θέλω να τονίσω το στόχο της διαδικασίας που θα ακολουθήσουμε και αυτός είναι ο εξής:

- ✓ **Η εξίσωση πρέπει να φτάσει στη μορφή $\boldsymbol{\alpha\cdot x=\beta}$. Και στα δύο μέλη της εξίσωσης, το α και το β θα περιέχουν την παράμετρό μας. Ο άγνωστός σας είναι το <u>x</u> και ΌΧΙ οποιαδήποτε άλλη παράμετρος σας δοθεί.**

Έχοντας τη σκέψη αυτή στο μυαλό μας, πάμε να δούμε τη μεθοδολογία.

Αν η εξίσωση είναι ήδη στη μορφή $\boldsymbol{\alpha\cdot x=\beta}$, τότε πάμε κατευθείαν στο **4^{o} Βήμα**. Αν όχι, τότε:

<u>1^{o} Βήμα:</u> Κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών (εφόσον υπάρχουν).

<u>2^{o} Βήμα:</u> Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους. Η παράμετρός σας είναι **γνωστός** αριθμός, οπότε «πάει» μαζί με τους αριθμούς. Η παράμετρος που «συνοδεύει» το x, ανήκει στους **αγνώστους** (για παράδειγμα αν η παράμετρος σας είναι το λ, τότε το $\lambda+1$ είναι αριθμός, ενώ το $\lambda\cdot x$ θεωρείται άγνωστος)

<u>3ο Βήμα:</u> Παραγοντοποιούμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης και φτάνουμε στη μορφή $\boldsymbol{\alpha\cdot x=\beta}$.

<u>4^{o} Βήμα:</u> Βρίσκουμε τις τιμές για τις οποίες $\alpha=0$. Εδώ η παράμετρός σας θα πάρει μία ή περισσότερες τιμές.

<u>5^{o} Βήμα:</u> Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

<u>1^{η} περίπτωση</u>: Αν $\boldsymbol{\alpha\neq 0}$ (άρα εξαιρώντας τις τιμές που βρήκατε από πάνω), τότε:

- ✓ η εξίσωση έχει μοναδική λύση και συνεπώς διαιρούμε με τον συντελεστή του αγνώστου.
- ✓ Απλοποιούμε, εφόσον γίνεται, και βρήκαμε τη λύση.

2η περίπτωση: Αν $\alpha = 0$, τότε παίρνουμε κάθε τιμή που βρήκαμε για την παράμετρό μας και κάνουμε αντικατάσταση στην $\boldsymbol{\alpha \cdot x = \beta}$. Τα πιθανά αποτελέσματα εδώ είναι δύο:

- ✓ Η εξίσωση θα είναι αδύνατη, δηλαδή καταλήξατε στη μορφή $0 \cdot x =$ κάποιον αριθμό.
- ✓ Η εξίσωση θα είναι αόριστη (ή ταυτότητα), δηλαδή καταλήξατε στη μορφή $0 \cdot x = 0$.

Παράδειγμα: Να λυθεί για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού λ η εξίσωση:

$$2x + \lambda(x - 1) = \lambda + 4 \Leftrightarrow$$

$$2x + \lambda x - \lambda = \lambda + 4 \Leftrightarrow$$

$$2x + \lambda x = \lambda + \lambda + 4 \Leftrightarrow$$

$$(2 + \lambda)x = 2\lambda + 4 \Leftrightarrow$$

$$(2 + \lambda)x = 2(\lambda + 2)$$

Είμαστε στη μορφή $\boldsymbol{\alpha \cdot x = \beta}$**,** οπότε λύνουμε: $2 + \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = -2$

- ➢ Για $\boldsymbol{\lambda \neq -2}$ έχουμε μοναδική λύση:

$$\frac{2 + \lambda}{2 + \lambda}x = \frac{2(\lambda + 2)}{2 + \lambda} \Leftrightarrow$$

$$x = 2$$

- ➢ Για $\boldsymbol{\lambda = -2}$, αντικαθιστούμε στην εξίσωση και έχουμε:

$$(2 - 2)x = 2(-2 + 2) \Leftrightarrow$$

$$0x = 2 \cdot 0 \Leftrightarrow$$

$$0x = 0 \text{ αόριστη}$$

!ΠΡΟΣΟΧΗ! Η ίδια διαδικασία ακολουθείται για να λύσουμε εξισώσεις με δύο παραμέτρους.

4η κατηγορία: «Παραμετρικές εξισώσεις στις οποίες ζητείται ο προσδιορισμός της παραμέτρου, έτσι ώστε να ισχύει μία συνθήκη»

Η κατηγορία αυτή σχετίζεται άμεσα και την προηγούμενη. Δηλαδή:

- ✓ Εξακολουθούμε να έχουμε παράμετρο.
- ✓ Ακολουθούμε πιστά τα βήματα **1 έως 3**.

Η διαφορά έγκειται στην εκφώνηση της άσκησης, η οποία θα ζητάει να προσδιοριστεί η παράμετρος που δίνεται, έτσι ώστε η εξίσωση:

α. να είναι αδύνατη

β. να είναι αόριστη/ταυτότητα
γ. να έχει μοναδική λύση.

Συνεπώς, εφόσον έχουμε φτάσει στο 3ο βήμα, άρα στη μορφή $\boldsymbol{\alpha \cdot x = \beta}$.,

- Για να είναι η εξίσωση **αδύνατη**:

4ο Βήμα:

α. Πρέπει $\boldsymbol{\alpha = 0}$ άρα λύνουμε και βρίσκουμε μία ή περισσότερες τιμές για τη δοθείσα παράμετρο
β. και $\boldsymbol{\beta \neq 0}$, άρα λύνουμε και βρίσκουμε μία ή περισσότερες τιμές της παραμέτρου, τις οποίες και θα εξαιρέσουμε.

- Για να είναι **αόριστη**:

4ο βήμα:

α. Πρέπει $\alpha = 0$, άρα λύνουμε και βρίσκουμε μία ή περισσότερες τιμές για τη δοθείσα παράμετρο
β. και $\beta = 0$, άρα λύνουμε και βρίσκουμε μία ή περισσότερες τιμές για τη δοθείσα παράμετρο.
γ. Δεχόμαστε την τιμή της παραμέτρου που **μηδενίζει ταυτόχρονα** το **α** και το **β**.

- Για να έχει **μοναδική λύση**:

4ο Βήμα: Πρέπει $\alpha \neq 0$, οπότε λύνουμε και βρίσκουμε μία ή περισσότερες τιμές για το λ, τις οποίες και εξαιρούμε.

5η κατηγορία: «Κλασματικές εξισώσεις»

- ✓ Χαρακτηριστικό της κατηγορίας αυτής είναι η παρουσία παρονομαστών και πιο συγκεκριμένα, η εμφάνιση αγνώστων σε αυτούς. Προσοχή, δεν είμαστε στην 1η κατηγορία ασκήσεων που είχαμε απλά αριθμούς στους παρονομαστές. Στο δια ταύτα, για να επιλύσουμε τέτοιου είδους εξισώσεις, ακολουθούμε την εξής μεθοδολογία:

1ο Βήμα: Παραγοντοποιούμε όλους τους παρονομαστές (εφόσον χρειάζεται).

2ο Βήμα: Βρίσκουμε το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών.

3ο Βήμα: Πρέπει όλοι οι παράγοντες που βρήκαμε στο Ε.Κ.Π. να είναι διάφοροι του μηδενός (πολύ απλά, αφού δε μπορούμε να διαιρέσουμε με το 0, δεν είναι δυνατόν οι παρονομαστές μας να μηδενίζονται).

4ο Βήμα: Κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών, πολλαπλασιάζοντας δηλαδή με το Ε.Κ.Π. που βρήκαμε νωρίτερα.

5ο Βήμα: Πλέον κατά τα γνωστά, κάνουμε οποιεσδήποτε πράξεις είναι απαραίτητες, χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους και βρίσκουμε μία ή περισσότερες λύσεις για τον άγνωστό μας.

6ο Βήμα: Ελέγχουμε αν οι λύσεις που βρήκαμε, ικανοποιούν τους περιορισμούς που θέσαμε στο 3ο Βήμα. Αν όχι, τότε τις απορρίπτουμε.

Παράδειγμα: Να λυθεί η εξίσωση:

$$\frac{x+2}{x^2+x}+\frac{3}{x}=\frac{4}{3x+3} \Leftrightarrow$$

$$\frac{x+2}{x(x+1)}+\frac{3}{x}=\frac{4}{3(x+1)} \Leftrightarrow$$

Έχουμε ότι: $\text{Ε.Κ.Π.}\,(x, x+1, 3) = 3 \cdot x \cdot (x+1)$

Πρέπει: $3 \cdot x \cdot (x+1) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \\ \text{και} \\ x+1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1 \end{cases}$

Κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών και έχουμε:

$$3x(x+1)\frac{x+2}{x(x+1)}+3x(x+1)\frac{3}{x}=3x(x+1)\frac{4}{3(x+1)} \Leftrightarrow$$

$$3(x+2)+3(x+1)3=4x \Leftrightarrow$$

$$3x+6+9(x+1)=4x \Leftrightarrow$$

$$3x+6+9x+9=4x \Leftrightarrow$$

$$3x+9x-4x=-9-6 \Leftrightarrow$$

$$8x=-15 \Leftrightarrow$$

$$\frac{8x}{8}=-\frac{15}{8} \Leftrightarrow$$

$$x=-\frac{15}{8}$$

Η λύση που βρήκαμε είναι δεκτή, διότι $x \neq 0$ και $x \neq -1$.