Μαθηματικά Β' Λυκείου Προσανατολισμού – Μεθοδολογίες / Συμπεράσματα 1ου κεφαλαίου

Μεθοδολογία 1: Για να δείξουμε ότι τρία σημεία Α,Β,Γ είναι **συνευθειακά**, αρκεί να δείξουμε ότι:

$$\overrightarrow{\mathbf{AB}} \parallel \overrightarrow{\mathbf{A\Gamma}}.$$

Μεθοδολογία 2: Αντίστοιχα, αν θέλουμε να δείξουμε ότι τρία σημεία Α,Β,Γ **δεν είναι συνευθειακά**, τότε αρκεί:

$$\overrightarrow{\mathbf{AB}} \nparallel \overrightarrow{\mathbf{A\Gamma}}$$

Μεθοδολογία 3: Για να δείξουμε ότι δύο διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι **ίσα**, αρκεί να ισχύουν οι παρακάτω δύο συνθήκες **(κατά σειρά)**:

α. $\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta}$
β. $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|$

Αναφέρεται το «κατά σειρά», διότι αν δύο διανύσματα δεν είναι ομόρροπα, τότε απαραίτητα δε θα είναι ίσα!

Μεθοδολογία 4: Αν μας δοθούν τέσσερα σημεία του χώρου Α,Β,Γ,Δ, μη συνευθειακά, τότε μπορούμε να δείξουμε ότι σχηματίζουν **παραλληλόγραμμο** αν και μόνο αν δύο απέναντι διανύσματα που σχηματίζονται από αυτά είναι **ίσα**.

Μεθοδολογία 5: Αν θέλουμε να δείξουμε ότι τρία σημεία Α,Β,Γ του χώρου σχηματίζουν **τρίγωνο**, τότε αρκεί να ισχύει:

$$\overrightarrow{AB} \nparallel \overrightarrow{A\Gamma}$$

Μεθοδολογία 6: Αν θέλουμε να αλλάξουμε τη σειρά των γραμμάτων ενός διανύσματος, για παράδειγμα ένα διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ να γίνει $\overrightarrow{BA}$, τότε αλλάζουμε το πρόσημο μπροστά από αυτό. Άρα:

$$\overrightarrow{\mathbf{AB}} = -\overrightarrow{\mathbf{BA}}$$

Μεθοδολογία 7: Αν θέλουμε να αποδείξουμε ότι μία σχέση με πράξεις διανυσμάτων ισχύει, κυρίως όταν δε γνωρίζουμε συντεταγμένες, τότε ορίζουμε κατάλληλο **σημείο αναφοράς** (αυτό που γνωρίζουμε τις περισσότερες πληροφορίες) και προσπαθούμε να επιλύσουμε.

Σημαντικές παρατηρήσεις θεωρίας:

1) Παράλληλα διανύσματα ⇒ ομόρροπα ή αντίθετα.
2) Ομόρροπα διανύσματα ⇒ παράλληλα.
3) Αντίρροπα διανύσματα ⇒ παράλληλα.
4) Ίσα διανύσματα ⇒ ομόρροπα.
5) Ομόρροπα διανύσματα ↝ όχι απαραίτητα ίσα.
6) Αντίθετα διανύσματα ⇒ αντίρροπα.
7) Αντίρροπα διανύσματα ↝ όχι απαραίτητα αντίθετα.
8) Ίσα διανύσματα ⇒ ομόρροπα.

Μεθοδολογία 8: Για να δείξουμε ότι δύο διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι παράλληλα μεταξύ τους, με $\vec{\beta} \neq \vec{0}$, αρκεί να δείξουμε ότι:

$$\vec{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{\lambda}\vec{\boldsymbol{\beta}}, \textbf{ όπου } \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}$$

Μεθοδολογία 9: Για να δείξουμε ότι δύο διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι παράλληλα μεταξύ τους, αρκεί να δείξουμε ότι:

$$\mathbf{det}\,(\vec{\boldsymbol{\alpha}}, \vec{\boldsymbol{\beta}}) = \mathbf{0}$$

- Με βάση τη **Μεθοδολογία 8**, οι **Μεθοδολογίες 1,2** γίνονται αντίστοιχα:

Για να δείξουμε ότι τρία σημεία Α,Β,Γ είναι **συνευθειακά**, αρκεί να δείξουμε ότι:

$$\mathbf{det}\left(\overrightarrow{\mathbf{AB}}, \overrightarrow{\mathbf{A\Gamma}}\right) = \mathbf{0}$$

Για να δείξουμε ότι τρία σημεία Α,Β,Γ **δεν είναι συνευθειακά**, αρκεί να δείξουμε ότι:

$$\mathbf{det}\left(\overrightarrow{\mathbf{AB}}, \overrightarrow{\mathbf{A\Gamma}}\right) \neq \mathbf{0}$$

Μεθοδολογία 10: Για να δείξουμε ότι δύο διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$, με συντελεστές διεύθυνσης λ_1, λ_2 αντίστοιχα, είναι παράλληλα μεταξύ τους, αρκεί να δείξουμε ότι:

$$\boldsymbol{\lambda_1} = \boldsymbol{\lambda_2}$$

Παρατηρήσεις: Δεδομένου ότι ο συντελεστής διεύθυνσης ενός διανύσματος $\vec{\alpha}$ ορίζεται ως εξής:

$$\lambda = \frac{y}{x} = \varepsilon\varphi\varphi$$

προβαίνουμε στα εξής συμπεράσματα:

1) Αν $y = 0$, τότε $\lambda = 0$ και άρα $\vec{\alpha} \parallel x'x$.
2) Αν $x = 0$, τότε ο συντελεστής διεύθυνσης δεν ορίζεται και άρα $\vec{\alpha} \parallel y'y$.

Μεθοδολογία 11: Για να δείξουμε ότι $\vec{\boldsymbol{\alpha}} \perp \vec{\boldsymbol{\beta}}$, αρκεί να ισχύει:

$$\vec{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \vec{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{0}$$

(Ισχύει και το αντίστροφο. Δηλαδή, αν γνωρίζετε ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$, τότε γνωρίζετε άμεσα ότι τα διανύσματα είναι κάθετα μεταξύ τους)

Μεθοδολογία 12: Για να δείξουμε ότι $\vec{\boldsymbol{\alpha}} \uparrow\uparrow \vec{\boldsymbol{\beta}}$, αρκεί να ισχύει:

$$\vec{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \vec{\boldsymbol{\beta}} = |\vec{\boldsymbol{\alpha}}| \cdot |\vec{\boldsymbol{\beta}}|$$

(Ισχύει και το αντίστροφο. Δηλαδή, αν γνωρίζετε ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$, τότε γνωρίζετε άμεσα ότι τα διανύσματα είναι ομόρροπα μεταξύ τους)

Μεθοδολογία 13: Για να δείξουμε ότι $\vec{\boldsymbol{\alpha}} \uparrow\downarrow \vec{\boldsymbol{\beta}}$, αρκεί να ισχύει:

$$\vec{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \vec{\boldsymbol{\beta}} = -|\vec{\boldsymbol{\alpha}}| \cdot |\vec{\boldsymbol{\beta}}|$$

(Ισχύει και το αντίστροφο. Δηλαδή, αν γνωρίζετε ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -|\vec{\alpha}| \cdot \vec{\beta}|$, τότε γνωρίζετε άμεσα ότι τα διανύσματα είναι αντίρροπα μεταξύ τους)

! Ιδιότητα SOS !

$$\vec{\boldsymbol{\alpha}}^2 = |\vec{\boldsymbol{\alpha}}|^2$$

Η ιδιότητα αυτή χρησιμεύει πολύ στις ασκήσεις.

Βασικές παρατηρήσεις στο εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων

Γνωρίζοντας ότι ο τύπος εύρεσης του εσωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι ο εξής:

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi$$

όπου φ η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$, προβαίνουμε στα εξής συμπεράσματα:

1) Αν $\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{90°}$, τότε $\vec{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \vec{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{0}$ (άρα είναι κάθετα μεταξύ τους).
2) Αν $\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{0°}$,τότε $\vec{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \vec{\boldsymbol{\beta}} = |\vec{\boldsymbol{\alpha}}| \cdot |\vec{\boldsymbol{\beta}}|$ (άρα είναι ομόρροπα).
3) Αν $\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{180°}$, τότε $\vec{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \vec{\boldsymbol{\beta}} = -|\vec{\boldsymbol{\alpha}}| \cdot |\vec{\boldsymbol{\beta}}|$ (άρα είναι αντίρροπα μεταξύ τους).

Συμβουλή: Αν μάθετε τον τύπο

$$\vec{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \vec{\boldsymbol{\beta}} = |\vec{\boldsymbol{\alpha}}| \cdot |\vec{\boldsymbol{\beta}}| \cdot \boldsymbol{\sigma\upsilon\nu\varphi}$$

Τότε δε χρειάζεται να μάθετε απ' έξω τον τύπο του συνφ. Απλά λύστε στην παραπάνω σχέση ως προς συνφ και έχετε:

$$\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu\varphi} = \frac{\vec{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \vec{\boldsymbol{\beta}}}{|\vec{\boldsymbol{\alpha}}| \cdot |\vec{\boldsymbol{\beta}}|}$$

- Στο εσωτερικό γινόμενο **ΔΕΝ** ισχύει η επιμεριστική ιδιότητα!! **Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων, είναι ίσο με το άθροισμα των γινομένων των ομώνυμων συντεταγμένων τους.**

Δηλαδή:

Αν $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$, τότε :

$$\vec{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \vec{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{x_1 x_2 + y_1 y_2}$$

Άμεσο συμπέρασμα είναι ότι το εσωτερικό γινόμενο είναι αριθμός και όχι διάνυσμα!!