Θέμα 1ο:

A1) Σχολικό βιβλίο σελίδα 30

A2) Σχολικό βιβλίο σελίδα 22

A3) α) Λ ($0 \le f_i \le 1$)
β) Σ (σελίδα 31)
γ) Σ (σελίδα 95)
δ) Λ $\left((\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \right)$
ε) Σ (σελίδα 87)

Θέμα Β: $f(x) = 2x^3 + ax^2 - 12x + 10$, $x \in \mathbb{R}$

B1) $f'(x) = 6x^2 + 2ax - 12$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

B2) Αφού η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $x_0 = 1$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, τότε ισχύει:

$$f'(1) = 0 \Leftrightarrow 6 \cdot 1^2 + 2 \cdot a \cdot 1 - 12 = 0 \Leftrightarrow$$

$$6 + 2a - 12 = 0 \Leftrightarrow 2a - 6 = 0 \Leftrightarrow 2a = 6 \overset{:2}{\Leftrightarrow} \boxed{a = 3}$$

Γιάννης Σπυράκος - Μαθηματικός

B3 Έχουμε: $f(x)=2x^3+3x^2-12x+10$

και

$$f'(x)=6x^2+6x-12$$

Μονοτονία $f'(x)=0 \Leftrightarrow 6x^2+6x-12=0 \overset{:6}{\Leftrightarrow} x^2+x-2=0$

$\Delta = 1+8=9$

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm3}{2\cdot1}=\frac{-1\pm3}{2}=\begin{cases}\frac{-1+3}{2}=\frac{2}{2}=1\\[4pt] \frac{-1-3}{2}=\frac{-4}{2}=-2\end{cases}$$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
			τ.μ.		τ.ε.		

Η συνάρτηση f στο $(-\infty,-2]$ είναι γνησίως αύξουσα.
Η συνάρτηση f στο $[-2,1]$ είναι γνησίως φθίνουσα.
Η συνάρτηση f στο $[1,+\infty)$ είναι γνησίως αύξουσα.

Ακρότατα Στο $x=-2$ η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο και η τιμή του είναι:

$$\begin{aligned} f(-2)&=2\cdot(-2)^3+3\cdot(-2)^2-12\cdot(-2)+10\\ &=2\cdot(-8)+3(4)+24+10\\ &=30\end{aligned}$$

Στο $x=1$ η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο και η τιμή του είναι:

Γιάννης Σπυράκος - Μαθηματικός

$$f(1) = 2\cdot 1^3 + 3\cdot 1^2 - 12\cdot 1 + 10 = 2+3-12+10 = 3$$

B4 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f'(x)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{6x^2+6x-12}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{6(x^2+x-2)}{x-1}$

$= \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{6\cancel{(x-1)}(x+2)}{\cancel{x-1}} = \lim\limits_{x\to 1} 6(x+2) = 6(1+2) = 6\cdot 3$

$= 18$

Θέμα Γ:

Γ1

Κλάσεις $[\ ,\ )$	Κεντρική τιμή x_i	Συχνότητα ν_i	$x_i \nu_i$
$[8,12)$	10	20	200
$[12,16)$	14	15	210
$[16,20)$		ν_3	
$[20,24)$		5	
	Σύνολο		

Έχουμε ότι: $x_3 = \dfrac{16+20}{2} = \dfrac{36}{2} = 18$

$x_4 = \dfrac{20+24}{2} = \dfrac{44}{2} = 22$

Έστω ν το πλήθος των μαθητών/τριών της Γ' τάξης του ΕΠΑΛ. Τότε:

Γιάννης Σπυράκος - Μαθηματικός

$$\bar{x} = 14 \Leftrightarrow \frac{200 + 210 + 18 \cdot \nu_3 + 5 \cdot 22}{\nu} = 14 \Leftrightarrow$$

$$\frac{200 + 210 + 18\nu_3 + 110}{\nu} = 14 \Leftrightarrow \frac{520 + 18\nu_3}{\nu} = 14 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{520 + 18\nu_3 = 14 \cdot \nu} \quad (1)$$

Επίσης, για τις συχνότητες ν_i, ισχύει η σχέση:

$$\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4 = \nu \Leftrightarrow 20 + 15 + \nu_3 + 5 = \nu \Leftrightarrow$$

$$\boxed{40 + \nu_3 = \nu} \quad (2)$$

Λύνουμε σύστημα των (1), (2) και έχουμε:

$$\begin{cases} 520 + 18\nu_3 = 14 \cdot \nu \\ 40 + \nu_3 = \nu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 520 + 18\nu_3 = 14 \cdot (40 + \nu_3) \\ 40 + \nu_3 = \nu \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 520 + 18\nu_3 = 560 + 14\nu_3 \\ 40 + \nu_3 = \nu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 18\nu_3 - 14\nu_3 = 560 - 520 \\ 40 + \nu_3 = \nu \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 4\nu_3 = 40 \\ 40 + \nu_3 = \nu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \nu_3 = 10 \\ 40 + 10 = \nu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \nu_3 = 10 \\ \nu = 50 \end{cases}$$

Γιάννης Σηφεάκης - Μαθηματικός

Άρα, πράγματι, $\nu_3 = 10$.

Γ2

Κλάσεις [,)	Κεντρική τιμή x_i	Συχνότητα ν_i	$x_i \nu_i$
[8, 12)	10	20	200
[12, 16)	14	15	210
[16, 20)	18	10	180
[20, 24)	22	5	110
	Σύνολο	50	700

Γ3 Γνωρίζουμε ότι:

$$s^2 = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{4}(x_i - \bar{x})^2 \cdot \nu_i$$

Κλάσεις [,)	Κεντρική τιμή x_i	Συχνότητα ν_i	$x_i \nu_i$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 \cdot \nu_i$
[8, 12)	10	20	200	16	320
[12, 16)	14	15	210	0	0
[16, 20)	18	10	180	16	160
[20, 24)	22	5	110	64	320
	Σύνολο	50	700		800

Συνεπώς:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{4}(x_i - \bar{x})^2 \cdot \nu_i}{\nu} = \frac{80\cancel{0}}{5\cancel{0}} = 16$$

Γιάννης Σπυράκος - Μαθηματικός

Γ4 Έχουμε ότι:

$$\boxed{CV = \frac{s}{\bar{x}}}$$

Όμως, $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{16} = 4$

Άρα, έχουμε:

$$CV = \frac{4}{14} = \frac{2}{7} \simeq 0,28 \text{ ή } CV = 28\%$$

Αφού $CV = 28\% > 10\%$ το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

Θέμα Δ $\quad f(x) = -\frac{1}{x^2}, \; x \neq 0$

Δ1 $f'(x) = \left(-\frac{1}{x^2}\right)' = -\left(\frac{1}{x^2}\right)' = -\frac{(1)' \cdot x^2 - 1 \cdot (x^2)'}{(x^2)^2} = -\frac{0 - 2x}{x^4} = \frac{2x}{x^4}$

- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{x^4} > 0 \overset{x^4>0}{\Longleftrightarrow} 2 \cdot x > 0 \Leftrightarrow \boxed{x > 0}$
- $f'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{x^4} < 0 \overset{x^4>0}{\Longleftrightarrow} 2 \cdot x \quad 0 \Leftrightarrow \boxed{x < 0}$

Άρα:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	‖	$+$
$f(x)$	↘	‖	↗

Γιάννης Σπυράκος - Μαθηματικός

• Στο διάστημα $(-\infty, 0)$ η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα.
• Στο διάστημα $(0, +\infty)$ η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

Δ2 Θέλουμε να δείξουμε ότι για $x \in [-4, -1]$

$$-1 \leq f(x) \leq -\frac{1}{16}$$

Το διάστημα $[-4, -1]$ είναι υποσύνολο του $(-\infty, 0)$ στο οποίο η f είναι γνησίως φθίνουσα. Έχουμε:

$$-4 \leq x \leq -1 \Rightarrow f(-4) \geq f(x) \geq f(-1) \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{16} \geq f(x) \geq -1 \Rightarrow \boxed{-1 \leq f(x) \leq -\frac{1}{16}}$$

Δ3 Η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $M(1, f(1))$ θα είναι της μορφής:

$$y = \lambda x + \beta$$

όπου: $\lambda = f'(1)$.

$$f'(1) = \frac{2 \cdot 1}{1^4} = 2$$

$$f(1) = -\frac{1}{1^2} = -1$$ Άρα $M(1, -1)$

Γιάννης Σπυράκος - Μαθηματικός

Το σημείο $M(1,-1)$ ανήκει στην $f(x)$, συνεπώς στην εφαπτόμενη. Άρα:

$$-1=2\cdot 1+\beta \Leftrightarrow -1-2=\beta \Leftrightarrow \boxed{\beta=-3}$$

Συνεπώς, η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $M(1,-1)$ είναι η:

$$y=2x-3$$

Δ4) $\bar{x}=4$, $s_x=2$

Τα σημεία $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ και $\Gamma(x_3,y_3)$ ανήκουν στην εφαπτομένη, οπότε για τα y ισχύει:

$$y=2x-3$$

Ισχύει ότι:

$$\bar{y}=2\cdot\bar{x}-3=2\cdot 4-3=8-3=5$$

και

$$s_y=|2|\cdot s_x=2\cdot 2=4$$

Άρα:

$$CV=\frac{s_y}{\bar{y}}=\frac{4}{5}=0{,}8 \text{ ή } CV=80\%$$

Γιάννης Σπυράκος - Μαθηματικός