Πολυωνυμικές εξισώσεις

- Οι εξισώσεις της μορφής $P(x) = 0$, όπου $P(x)$ πολυώνυμο, λέγονται **πολυωνυμικές εξισώσεις**.

Τρόποι επίλυσης πολυωνυμικών εξισώσεων

- Όταν έχουμε πολυώνυμα $2^{ου}$ βαθμού, τότε κατά τα γνωστά, κάνουμε διακρίνουσα.

Τι γίνεται όμως όταν έχουμε πολυώνυμα $3^{ου}$ βαθμού ή και μεγαλύτερου;

Πολυώνυμα βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 3

Βασικός μας στόχος είναι να καταλήξουμε στη μορφή

$$P_1(x) \cdot P_2(x) \cdot \ldots \cdot P_k(x) = 0$$

(γινόμενο πολυωνύμων ίσο με μηδέν)

όπου $P_1(x), P_2(x), \ldots, P_k(x)$ είναι πολυώνυμα $1^{ου}$ και $2^{ου}$ βαθμού.

Άρα σε αυτή τη μορφή μπορούμε εύκολα να πούμε ότι

$$P_1(x) = 0 \text{ ή } P_2(x) = 0 \ldots \text{ ή } P_k(x)$$

Για να φτάσουμε όμως στο στόχο μας, πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τα κατάλληλα μαθηματικά «εργαλεία». Η όλη διαδικασία που ακολουθούμε καλείται **παραγοντοποίηση**. Παραδείγματα παραγοντοποίησης είναι:

- Κοινοί παράγοντες
- Διακρίνουσα
- Σχήμα Horner

Η διακρίνουσα, όπως αναφέρθηκε και στην αρχή, δεν είναι χρήσιμη για πολυώνυμα 3^{ου} βαθμού και άνω. Τα πιο βασικά «εργαλεία» που θα χρησιμοποιήσουμε λοιπόν, είναι:

- **Οι κοινοί παράγοντες**
- **Σχήμα Horner**

Για να λύσουμε μία πολυωνυμική εξίσωση λοιπόν, ακολουθούμε τα εξής βασικά βήματα:

1^ο βήμα: «Φέρνω» **όλους** τους όρους στο **πρώτο μέλος**.

2^ο βήμα: **Διατάσσουμε** τους όρους κατά **φθίνουσα σειρά** , με γνώμονα τον άγνωστο "x" και τις δυνάμεις του (για παράδειγμα πρώτα θα έχουμε την 3^η δύναμη του x , μετά τη 2^η , ύστερα την 1^η και τελευταίος θα είναι ο σταθερός όρος).

3^ο βήμα: **Παραγοντοποιώ** για να φέρω το πολυώνυμο στη μορφή "γινόμενο πολυωνύμων ίσο με μηδέν"

- Πολλές φορές, είναι πιο **γρήγορο** να προσπαθούμε να βγάζουμε κοινούς παράγοντες και όχι να καταφεύγουμε απευθείας στο σχήμα Horner. Αυτό όμως είναι στην κρίση σας. Αν δε βλέπετε εύκολα κάποιον κοινό παράγοντα, μη χάνετε το χρόνο να ψάχνετε αποκλειστικά αυτό. Σκεφτείτε έξυπνα.

Αν λοιπόν αποκλείσουμε το ενδεχόμενο κοινών παραγόντων , ή είναι πολύ δύσκολο να τους βρούμε, καταφεύγουμε άμεσα στο **σχήμα Horner**.

Πώς και πότε χρησιμοποιούμε το σχήμα Horner:

Το σχήμα Horner χρησιμοποιείται πάντα όταν έχουμε πολυωνυμικές εξισώσεις **3ου βαθμού και άνω**. Άρα ακολουθούμε την εξής διαδικασία:

1ο βήμα: «Φέρνουμε» στο πρώτο μέλος όλους τους όρους και τους **διατάσσουμε σε φθίνουσα σειρά** , με βάση πάντα τις δυνάμεις του άγνωστου x (ή όπως αλλιώς συμβολίζεται ο άγνωστός σας).

2ο βήμα: Βρίσκουμε τους **διαιρέτες του σταθερού όρου** και δοκιμάζουμε ποιος από αυτούς είναι **ρίζα** της πολυωνυμικής εξίσωσης.

ΠΡΟΣΟΧΗ! Οι διαιρέτες του σταθερού όρου είναι **πιθανές** ακέραιες ρίζες της πολυωνυμικής εξίσωσης. Άρα, από αυτές, εμείς θα πρέπει να βρούμε ποια είναι η ρίζα της.

3ο βήμα: Κάνουμε το σχήμα Horner (προσοχή στο πινακάκι και τους συντελεστές των όρων που θα βάλετε) και τέλος μπορούμε να παραγοντοποιήσουμε την πολυωνυμική μας εξίσωση (δηλαδή στη μορφή $(x-\rho)(\alpha x^2+\beta x+\gamma)=0$).

Πολυώνυμα 4ου βαθμού

Όπως και στα πολυώνυμα 3ου βαθμού οι βασικές μας επιλογές είναι:

- **Κοινοί παράγοντες**
- **Σχήμα Horner**

Αν προβούμε στο σχήμα Horner, τότε πρέπει να γνωρίζουμε ότι μετά την παραγοντοποίηση, το ένα πολυώνυμο που θα έχουμε θα είναι 1ου βαθμού, ενώ το δεύτερο 3ου. Τι σημαίνει αυτό πρακτικά; **Θα πρέπει να εφαρμόσουμε για δεύτερη φορά το σχήμα Horner!**

ΠΡΟΣΟΧΉ! Οι «διτετράγωνες» εξισώσεις που μάθαμε στην $1^η$ λυκείου, λύνονται με αλλαγή μεταβλητής. Δηλαδή, κάθε εξίσωση της μορφής:

$$\alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$$

όπου $\alpha \neq 0$ και $\beta, \gamma \in R$

λύνεται θέτοντας $y = x^2$ (το y είναι τυχαίος συμβολισμός) και προχωρώντας με διακρίνουσα.