1.2 ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΚΑΙ ΑΦΑΙΡΕΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

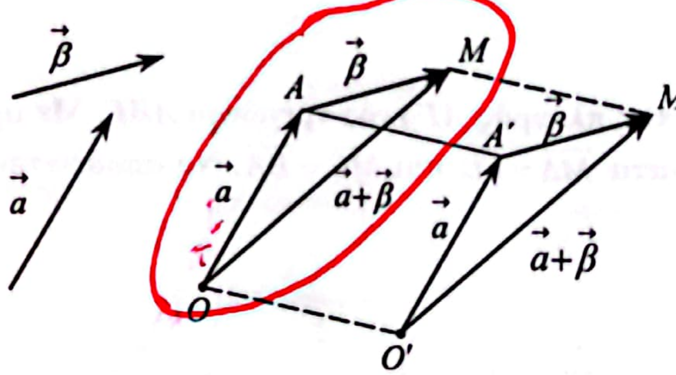
Πρόσθεση Διανυσμάτων

Ορισμός

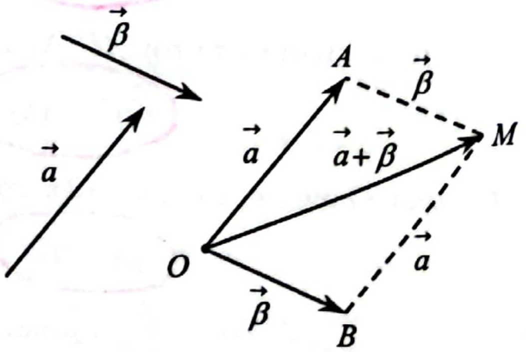
Έστω δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. Με αρχή ένα σημείο O παίρνουμε διάνυσμα $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}$ και στη συνέχεια με αρχή το A παίρνουμε διάνυσμα $\overrightarrow{AM}=\vec{\beta}$. Το διάνυσμα $\overrightarrow{OM}$ λέγεται **άθροισμα** ή **συνισταμένη** των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ και συμβολίζεται με $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$.

Θα αποδείξουμε ότι το άθροισμα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι ανεξάρτητο της επιλογής του σημείου O. Πράγματι, αν O' είναι ένα άλλο σημείο και πάρουμε τα διανύσματα $\overrightarrow{O'A'}=\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{A'M'}=\vec{\beta}$, επειδή $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{O'A'}=\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{A'M'}=\vec{\beta}$, έχουμε $\overrightarrow{OO'}=\overrightarrow{AA'}$ και $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{MM'}$. Επομένως, $\overrightarrow{OO'}=\overrightarrow{MM'}$, που συνεπάγεται ότι και $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{O'M'}$.

ορισμός



Το άθροισμα δύο διανυσμάτων βρίσκεται και με το λεγόμενο *κανόνα του παραλληλόγραμμου.* Δηλαδή, αν με αρχή ένα σημείο O πάρουμε τα διανύσματα $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{OB}=\vec{\beta}$, τότε το άθροισμα $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ ορίζεται από τη διαγώνιο OM του παραλληλόγραμμου που έχει προσκείμενες πλευρές τις OA και OB.



Ιδιότητες Πρόσθεσης Διανυσμάτων

Για την πρόσθεση των διανυσμάτων ισχύουν οι γνωστές ιδιότητες της πρόσθεσης πραγματικών αριθμών. Δηλαδή, αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ είναι τρία διανύσματα, τότε:

(1)	$\vec{\alpha}+\vec{\beta}=\vec{\beta}+\vec{\alpha}$	(Αντιμεταθετική ιδιότητα)
(2)	$(\vec{\alpha}+\vec{\beta})+\vec{\gamma}=\vec{\alpha}+(\vec{\beta}+\vec{\gamma})$	(Προσεταιριστική ιδιότητα)
(3)	$\vec{\alpha}+\vec{0}=\vec{\alpha}$	
(4)	$\vec{\alpha}+(-\vec{\alpha})=\vec{0}$.	

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

- Από το προηγούμενο σχήμα έχουμε:

$$\vec{\alpha}+\vec{\beta}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OM}$$

1

και

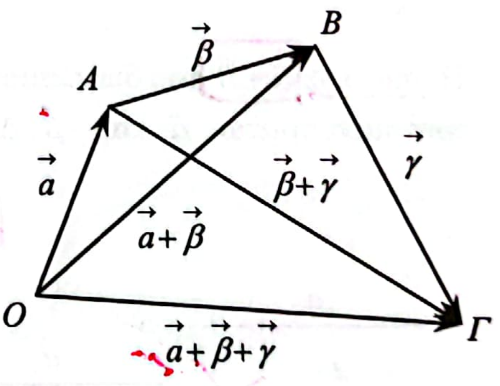
$$\vec{\beta}+\vec{\alpha}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{OM}.$$

Επομένως, $\vec{\alpha}+\vec{\beta}=\vec{\beta}+\vec{\alpha}$.

- Από το διπλανό σχήμα έχουμε:

2 $(\vec{\alpha}+\vec{\beta})+\vec{\gamma}=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB})+\overrightarrow{B\Gamma}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{B\Gamma}=\overrightarrow{O\Gamma}$ και

$\vec{\alpha}+(\vec{\beta}+\vec{\gamma})=\overrightarrow{OA}+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma})=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{A\Gamma}=\overrightarrow{O\Gamma}$.



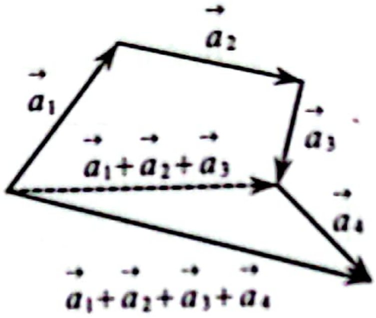
Επομένως, $(\vec{\alpha}+\vec{\beta})+\vec{\gamma}=\vec{\alpha}+(\vec{\beta}+\vec{\gamma})$.

- Οι ιδιότητες (3) και (4) είναι προφανείς. ■

Η προσεταιριστική ιδιότητα μας επιτρέπει να συμβολίζουμε καθένα από τα ίσα αθροίσματα $(\vec{\alpha}+\vec{\beta})+\vec{\gamma}$ και $\vec{\alpha}+(\vec{\beta}+\vec{\gamma})$ με $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}$, το οποίο θα λέμε άθροισμα των τριών διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$. Το άθροισμα περισσότερων διανυσμάτων $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3,...,\vec{\alpha}_\nu$, $\nu\geq 3$ ορίζεται επαγωγικά ως εξής:

$$\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2+\vec{\alpha}_3+...+\vec{\alpha}_\nu=(\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2+\vec{\alpha}_3+...+\vec{\alpha}_{\nu-1})+\vec{\alpha}_\nu.$$

Για παράδειγμα, $\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2+\vec{\alpha}_3+\vec{\alpha}_4=(\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2+\vec{\alpha}_3)+\vec{\alpha}_4$

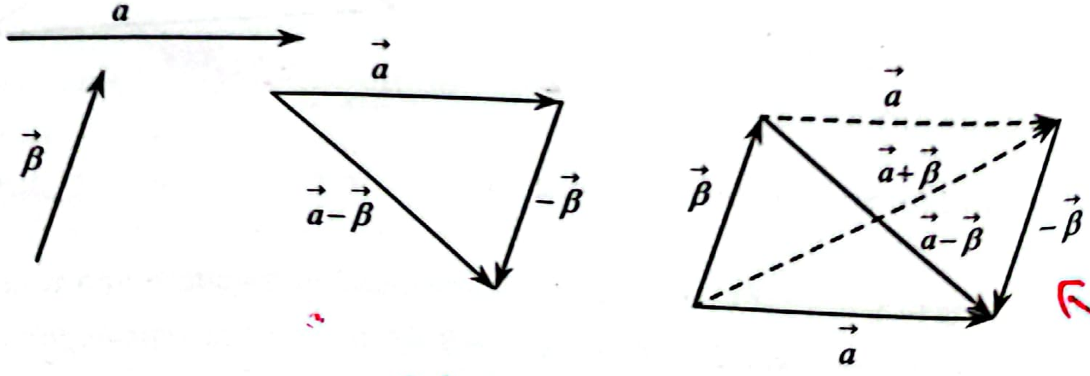


Δηλαδή, για να προσθέσουμε ν διανύσματα $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3,...,\vec{\alpha}_\nu$, τα καθιστούμε διαδοχικά, οπότε το άθροισμά τους θα είναι το διάνυσμα που έχει ως αρχή την αρχή του πρώτου και ως πέρας το πέρας του τελευταίου. Επειδή μάλιστα ισχύουν η αντιμεταθετική και η προσεταιριστική ιδιότητα της πρόσθεσης, το άθροισμα δε μεταβάλλεται αν αλλάξει η σειρά των προσθετέων ή αν μερικοί από αυτούς αντικατασταθούν με το άθροισμά τους.

Αφαίρεση Διανυσμάτων

Η διαφορά $\boxed{\vec{\alpha}-\vec{\beta}}$ του διανύσματος $\vec{\beta}$ από το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ ορίζεται ως άθροισμα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $-\vec{\beta}$. Δηλαδή

$$\boxed{\vec{\alpha}-\vec{\beta}=\vec{\alpha}+(-\vec{\beta})}$$



Πρόταση:

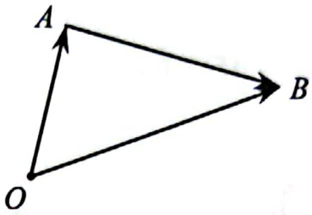
Σύμφωνα με τα παραπάνω, αν έχουμε δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, τότε υπάρχει μοναδικό διάνυσμα $\vec{x}$, τέτοιο, ώστε $\vec{\beta}+\vec{x}=\vec{\alpha}$. Πράγματι,

Απόδειξη: $\vec{\beta}+\vec{x}=\vec{\alpha}\Leftrightarrow(-\vec{\beta})+(\vec{\beta}+\vec{x})=(-\vec{\beta})+\vec{\alpha}\Leftrightarrow\vec{0}+\vec{x}=\vec{\alpha}+(-\vec{\beta})\Leftrightarrow\vec{x}=\vec{\alpha}-\vec{\beta}$.

προκύπτει ουσιαστικά ότι το $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ και το $\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ είναι οι δύο διαγώνιοι.

Διάνυσμα Θέσεως

Έστω O ένα σταθερό σημείο του χώρου. Τότε για κάθε σημείο M του χώρου ορίζεται το διάνυσμα $\overrightarrow{OM}$, το οποίο λέγεται **διάνυσμα θέσεως του M** ή **διανυσματική ακτίνα του M**. Το σημείο O, που είναι η κοινή αρχή όλων των διανυσματικών ακτίνων των σημείων του χώρου, λέγεται **σημείο αναφοράς** στο χώρο.



Αν O είναι ένα σημείο αναφοράς, τότε για οποιοδήποτε διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ έχουμε $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}$ και επομένως

$$\boxed{\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}}$$!ΊΣΟΣ!

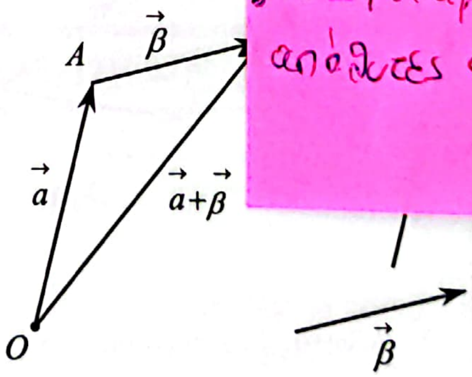
Δηλαδή:

"Κάθε διάνυσμα στο χώρο είναι ίσο με τη διανυσματική ακτίνα του πέρατος μείον τη διανυσματική ακτίνα της αρχής".

Είναι λάθος:
$|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}| \Leftrightarrow \vec{\alpha}=\vec{\beta}$ ή $\vec{\alpha}=-\vec{\beta}$
?Δεν μιλάμε για απόλυτες τιμές?

Μέτρο Αθροίσματος Διανυσμάτων

Στο διπλανό σχήμα βλέπουμε το άθροισμα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. Από την τριγωνική ανισότητα γνωρίζουμε όμως ότι



$$|(OA)-(AB)|\leq(OB)\leq(OA)+(AB)$$

και επομένως

!ΠΡΟΣΟΧΗ!
$|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|$ ΟΧΙ
$|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|$ ΟΧΙ

$$\boxed{\big||\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|\big|\leq|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|\leq|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|}$$

γνωστή και ως "τριγωνική ανισότητα"

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Για τέσσερα σημεία A, B, Γ, Δ να αποδειχτεί ότι $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{\Delta\Gamma}=\overrightarrow{\Delta B}+\overrightarrow{A\Gamma}$.**